# אלגברה 1 מ' (104016)

## בחינת מועד ב' חורף תשס"ו

שם משפחה: _____ שם פרטי: _____

מספר סטודנט: _____ פקולטה: _____

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- בבחינה יש **14** שאלות.
- בחר תשובה נכונה לכל שאלה מבין האפשרויות הנתונות וסמן ב- X את המשבצת המתאימה. אם תסמן יותר ממשבצת אחת לשאלה מסוימת, תשובתך לשאלה זו תפסל.
- לא תורדנה נקודות על תשובות לא נכונות.
- בסוף הבחינה מצורף דף תשובות נוסף המיועד עבורך. תוכל לרשום בו את תשובותיך ולשמור לצורך בדיקת תשובותיך.
- נא לא לפרק השאלון. בתום הבחינה עליך להחזיר את כל השאלון פרט לדף האחרון.
- אסור להשתמש בכל חומר עזר כולל מחשבון.

***בהצלחה!***

| | א | ב | ג | ד | ה |
|---|---|---|---|---|---|
| שאלה 1 | | | | | |
| שאלה 2 | | | | | |
| שאלה 3 | | | | | |
| שאלה 4 | | | | | |
| שאלה 5 | | | | | |
| שאלה 6 | | | | | |
| שאלה 7 | | | | | |
| שאלה 8 | | | | | |
| שאלה 9 | | | | | |
| שאלה 10 | | | | | |
| שאלה 11 | | | | | |
| שאלה 12 | | | | | |
| שאלה 13 | | | | | |
| שאלה 14 | | | | | |

סה"כ:

**שאלה מס' 1:**

נתבונן בפולינום

$$p(z)=z^{10}+a_9z^9+a_8z^8+a_7z^7+a_6z^6+a_5z^5$$

עם מקדמים ממשיים $a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$; **אזי**

א) אם $a_9<0$ אז בהכרח ל- $p(z)$ יש שורש ממשי חיובי.
ב) אם $a_5<0$ אז בהכרח ל- $p(z)$ יש שורש ממשי חיובי.
ג) בהכרח הריבוי של כל שורש לא ממשי של $p(z)$ איננו 2.
ד) בהכרח הריבוי של כל שורש של $p(z)$ השונה מאפס איננו 5.
ה) כל הטענות האחרות אינן נכונות.

**שאלה מס' 2:**

יהיו $U$ ו- $W$ שני תת- מרחבים של מרחב וקטורי $V$. נתון כי $\dim V = 5$, $U \not\subset W$ ו- $W \not\subset U$ ומתקיים $\dim(U+W) = 2\cdot\dim(U\cap W)$; אז בהכרח מתקיים:

א) $\dim U \neq \dim W$.
ב) $\dim(U\cap W) = 2$.
ג) $V = U + W$.
ד) $\dim U = 2$ או $\dim W = 2$.
ה) $\dim U = 4$ או $\dim W = 4$.

**שאלה מס' 3:**

יהיו $U$ ו- $W$ שני תת-מרחבים של $\mathrm{R}^7$ שמוגדרים כלהלן:
$W = span\{v_1,v_2,v_3\}$ כש- $v_1,v_2,v_3\in\mathrm{R}^7$ וקטורים נתונים ו- $U=\{x\in\mathrm{R}^7 : \quad Ax=0\}$,
כאשר $A$ היא מטריצה נתונה מסדר $m\times 7$; **אזי**

א) אם $U=W$ אז בהכרח $m\geq 4$.
ב) אם $U=W$ אז בהכרח $m\leq 3$.
ג) אם $rank\,A=4$ אז בהכרח $U\neq W$.
ד) אם $m=3$ ו- $W\subset U$ אז בהכרח הוקטורים $v_1,v_2,v_3$ תלויים ליניארית.
ה) אם $\mathrm{R}^7 = U\oplus W$ אז בהכרח $rank\,A=3$.

**שאלה מס' 4:**

נתבונן בטרנספורמציה הליניארית

$$T:\quad \mathrm{R}^5 \to \mathrm{R}^5,\quad T(x)=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 3 & 2 \\ d & 0 & 0 & 2 & 0 \\ e & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot x,\quad x\in \mathrm{R}^5$$

כאשר $a, b, c, d, e$ הם פרמטרים; **אזי**

א) $\dim Im\, T \geq 4$ לכל $a, b, c, d, e$ .
ב) קיימים $a, b, c, d, e$ כך ש- $\dim Ker\, T \geq 2$.
ג) אם $T$ היא טרנספורמציה חד- חד ערכית אז בהכרח $b \neq 0$.
ד) אם $T$ היא טרנספורמציה חד- חד ערכית אז בהכרח $c \neq 0$.
ה) אם $T$ היא טרנספורמציה על אז בהכרח $d \neq 0$.

**שאלה מס' 5:**

תהי $T: V \to U$ העתקה ליניארית ויהי $W$ $(V \neq W)$ תת- מרחב של $V$.
נגדיר $S: W \to U$ ע"י $S(w) = T(w)$ לכל $w \in W$ (כלומר $S$ היא ההעתקה הליניארית $T$ על איברי $W$ בלבד). אחת הטענות הבאות <u>איננה</u> נכונה. סמן אותה.

א) אם $T$ חד- חד ערכית אז $S$ חד- חד ערכית.
ב) $ker\,(S) = ker\, T \cap W$ .
ג) $Im\,(S) = T\,(W)$ $(\, T\,(W) = \{\, T\,(w):\ w \in W\,)$
ד) אם $ker\,(T) \neq \{0\}$ אז $ker\,(S) \neq \{0\}$.
ה) אם $\lambda$ ערך עצמי של $S$ אז $\lambda$ הוא גם ערך עצמי של $T$.

**שאלה מס' 6:**

יהי $V = M_n\,(R)$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר $n \times n$ , $(n \geq 3)$.
נגדיר $T: V \to V$ ע"י $T\,(A) = 2A^t + A$ ; **אזי**

א) $\boldsymbol{T}$ איננה לכסינה.
ב) ל- $\boldsymbol{T}$ יש לפחות 3 ערכים עצמיים שונים.
ג) ל- $\boldsymbol{T}$ יש ערך עצמי יחיד.
ד) $\boldsymbol{T}$ איננה הפיכה.
ה) ל- $\boldsymbol{T}$ יש בדיוק 2 ערכים עצמיים שונים.

**שאלה מס' 7:**

יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד 2 ותהי

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

המטריצה המייצגת את האופרטור הליניארי $T: V \to V$ בבסיס $e = \{e_1, e_2\}$.

תהי B המטריצה המייצגת את T בבסיס $v = \{v_1, v_2\}$ כאשר $v_1 = 2e_1,\ v_2 = 3e_2$ ; **אזי**

א) $B=\begin{pmatrix} 2a_{11} & \frac{2}{3}a_{12} \\ 2a_{21} & \frac{2}{3}a_{22} \end{pmatrix}$

ב) $B=\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{3}{2}a_{12} \\ \frac{2}{3}a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

ג) $B=\begin{pmatrix} \frac{3}{2}a_{11} & \frac{2}{3}a_{12} \\ \frac{3}{2}a_{21} & \frac{2}{3}a_{22} \end{pmatrix}$

ד) $B=\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{2}{3}a_{12} \\ \frac{3}{2}a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

ה) $B=\begin{pmatrix} \frac{2}{3}a_{11} & \frac{3}{2}a_{12} \\ \frac{2}{3}a_{21} & \frac{3}{2}a_{22} \end{pmatrix}$

**שאלה מס' 8:**

נתונה הטרנספורמציה $T: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ כך ש- $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix}$ ; **אזי**

א) $T$ לכסינה.

ב) $T^2 + 6T + 9I = 0$.

ג) $T^5 + 6T^4 + 9T^2 = 0$.

ד) $T^4 + 9T^2 + I = 0$.

ה) $T^3 + 9T^2 + 6T = 0$.

**שאלה מס' 9:**

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&2&0\\0&2&2&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$ ; **אזי**

א) $A$ לא לכסינה מעל R.

ב) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של $A$ .

ג) $\left|(A+I)^{-1}\right|=\frac{1}{8}$ .

ד) $tr\left((A+I)^{-1}\right)=\frac{38}{15}$ .

ה) קיימת חזקה טבעית $k$ כך ש- $rank\,(A^k)<2$ .

**שאלה מס' 10:**

נתון: $A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $det\,A\neq 0$, $A=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\a&0&3&0\\b&3&0&0\\c&1&2&5\end{pmatrix}$ ; **אזי**

א) בהכרח $x_2=\frac{b}{b+2a}$ .

ב) בהכרח $x_2=\frac{b-2a}{b+2a}$ .

ג) בהכרח $x_3=\frac{b+3a}{b+2a}$ .

ד) בהכרח $x_3=\frac{a}{2b-3a}$ .

ה) בהכרח $x_3=\frac{b}{2b-3a}$ .

המלצה: כדאי להשתמש בשיטת קרמר.

**שאלה מס' 11:**

$A$ ו- $B$ הן שתי מטריצות הפיכות $3\times3$, המקיימות: $A + 3B^t = 0$ ו- $|B| = 2$;
אז הדטרמיננטה של $A^{-1}\cdot B^2\cdot\left(B^t\right)^{-1}$ שווה ל-

א) $-\frac{1}{3}$ ב) $-3$ ג) $27$ ד) $\frac{1}{9}$ ה) $-\frac{1}{27}$

**שאלה מס' 12:**

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & b-a\\ b & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$ כאשר $a$ ו- $b$ פרמטרים ממשיים. **אזי**

א) לכל $a$ ו- $b$ המטריצה $A$ לכסינה.
ב) אם $a = 1$ אז לכל $b$ המטריצה $A$ איננה לכסינה.
ג) אם $b = 1$ אז לכל $a$ המטריצה $A$ איננה לכסינה.
ד) אם $a = b$ אז $A$ איננה לכסינה.
ה) לכל $a$ ו- $b$ המטריצה $A$ איננה הפיכה.

**שאלה מס' 13:**

תהי $A$ מטריצה $n\times n$ $(n > 2)$ ויהיו $v_1,\dots,v_m$ $(m < n)$ וקטורים ב- $\mathrm{R}^n$. אז בהכרח מתקיים:

א) אם $v_1,\dots,v_m$ בלתי תלויים ליניארית אז $Av_1,\dots,Av_m$ בלתי תלויים ליניארית.
ב) אם $Av_1,\dots,Av_m$ בלתי תלויים ליניארית אז $v_1,\dots,v_m$ בלתי תלויים ליניארית.
ג) אם $v \in span\{v_1,\dots,v_m\}$ אז $Av \in span\{v_1,\dots,v_m\}$.
ד) אם $Av_1,\dots,Av_m$ תלויים ליניארית אז $v_1,\dots,v_m$ תלויים ליניארית.
ה) כל הטענות האחרות אינן נכונות.

**שאלה מס' 14:**

$V = \mathrm{R}^2$ ונגדיר לכל $(x_1, x_2)\,,\,(y_1, y_2)$ ב- $V$:

$$\langle (x_1, x_2)\,,\,(y_1, y_2)\rangle = \alpha\, x_1\cdot y_1 - 4\, x_1\cdot y_2 - 4\, x_2\cdot y_1 + 7\, x_2\cdot y_2$$

אזי הגדרה זו מהווה מכפלה פנימית על $V$ אם ורק אם:

א) $\alpha \ge \sqrt{7}$ ב) $\alpha = 7$ ג) $\alpha > \frac{8}{\sqrt{7}}$ ד) $\alpha \ge \frac{16}{7}$ ה) $\alpha > \frac{16}{7}$

# דף תשובות

- דף זה מיועד לשימושך.
- אין צורך להחזיר דף זה עם הבחינה.

| | א | ב | ג | ד | ה |
|---|---|---|---|---|---|
| שאלה 1 | | | | | |
| שאלה 2 | | | | | |
| שאלה 3 | | | | | |
| שאלה 4 | | | | | |
| שאלה 5 | | | | | |
| שאלה 6 | | | | | |
| שאלה 7 | | | | | |
| שאלה 8 | | | | | |
| שאלה 9 | | | | | |
| שאלה 10 | | | | | |
| שאלה 11 | | | | | |
| שאלה 12 | | | | | |
| שאלה 13 | | | | | |
| שאלה 14 | | | | | |